# Un modelo de programación discreta para minimizar el costo de la transportación de cargas

## *A discrete schedule model to minimize cost of freight transportation*

**Eduardo Martínez Puig**

Facultad de Economía.
Universidad de La Habana,
Cuba.
eduardo@fec.uh.cu

**RESUMEN**

Uno de los *Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución* sobre el transporte se refiere al objetivo de mejorar la calidad y eficiencia del servicio de transportación de cargas y pasajeros, lo que puede lograrse, entre otras formas, mediante las alternativas más económicas posibles. Por lo anterior, es necesario aprovechar las amplias posibilidades de las técnicas de optimización en la gestión económica de nuestro país, para utilizar al máximo posible los escasos recursos con que cuenta el Estado cubano en medio de una coyuntura de aguda crisis internacional. En el presente artículo se desarrolla un modelo económico matemático para minimizar el costo de alquiler de almacenes y camiones dedicados a la transportación de cargas, desde los almacenes hacia varios destinos y en un caso particular se resuelve con la utilización del paquete informático sistema para el análisis cuantitativo de negocios sobre el ambiente Windows (WinQSB).

**PALABRAS CLAVE:** función objetivo, optimización condicionada, programación en enteros puro, variable auxiliar entera, variables binarias.

***ABSTRACT***

*One of the* Cuba's Guidelines of the Economic and Sotial Policy of the Party and the Revolution *referring to transportation states the goal of improving quality and efficiency of freight and passengers transportation service, which can be achieved through, among others, the cheapest alternatives. So, it is necessary to take advantage of the wide technical possibilities optimizing economic management in our country, in order to use, as much as possible, the limited resources of the Cuban State in the framework of a deep international economic crisis. The present paper develops a mathematical economic model to minimize warehouse and trucks leasing costs for freight transportation, and in a particular case such is*

*solved through a computer system package aimed at the quantitative analysis of business (WinQSB).*

**KEYWORDS:** *objective, conditioned optimization, planification in integer numbers, integer auxiliary variable, binary variable.*

**RECIBIDO:** 3/6/2012
**ACEPTADO:** 20/9/2012

## Introducción

La programación lineal (PL) es un método para resolver problemas de optimización condicionada, en la que la función objetivo o función de rendimiento (maximizar o minimizar) y las restricciones que deben ser satisfechas, en su conjunto, son todas ellas lineales y las variables matemáticas que intervienen no pueden tomar valores negativos (Castillo, 2002).

En el análisis de actividades o procesos productivos y la asignación óptima de los recursos económicos o factores productivos, tanto en el interior de la empresa como a nivel macroeconómico, tuvo la PL sus primeras aplicaciones en el campo civil, las que se han extendido notablemente a la actividad empresarial, apoyadas eficazmente en el extraordinario desarrollo de las ciencias informáticas para resolver, en la práctica, complejos problemas de optimización.

Cuando las variables de un problema de PL solo pueden tomar valores enteros, estamos en presencia de un problema de programación lineal en enteros puro (PLEP), o de programación lineal en enteros mixto (PLEM) cuando las variables que solo pueden tomar valores enteros no son todas las que intervienen en el problema, o cuando aunque por su naturaleza el problema no exige soluciones enteras, se requiere de variables enteras para tratarlo analíticamente.

En particular, las denominadas variables binarias o variables 0-1 se pueden encontrar tanto en problemas de PLEP como de PLEM, lo que potencia notablemente las posibilidades de aplicación de las técnicas de optimización a la práctica económica, pues permiten incluir no solo relaciones cuantitativas, sino también cualitativas, y ello extiende notablemente la gama de situaciones de interés que se pueden abordar (Hiriart-Urruty, 1996).

En este artículo se presenta el problema general a resolver, se reseñan brevemente algunos elementos teóricos importantes, se muestra la propuesta de modelación económico matemática para la solución del problema y se aplican los recursos informáticos para solucionar un caso particular.

Por otra parte en los *Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución* (Partido Comunista de Cuba –PCC–, 2011), al referirse a la política para el transporte, se plantea: «Continuar la recuperación, modernización y reorganización del transporte, con el objetivo de mejorar la calidad y eficiencia del servicio de transportación de cargas y pasajeros, a partir del uso racional de todos los recursos, en especial los energéticos, previendo las alternativas más económicas posibles» (p. 29).

En este marco se desarrolló el presente trabajo, como una modesta contribución a la importante problemática de la transportación de cargas.

## Problema general a resolver

Una empresa que se dedica a la transportación de cargas quiere contratar los servicios de otra que alquila mensualmente $m$ almacenes, cada uno con $t_k$ camiones con capacidad de carga $T_k$, que transportan la carga desde los almacenes hacia $n$ destinos que tienen demandas mensuales $d_l$, que deben ser satisfechas totalmente.

El costo mensual de alquiler de cada camión desde el almacén $i$ ($i$ = 1, ..., $m$) hacia el destino $j$ ($j$ = 1, ..., $n$) es $c_{ij}$, y el costo de alquiler mensual de cada almacén es $C_i$. La empresa desea minimizar el costo total de alquiler de almacenes y camiones que contrata mensualmente (figura 1).

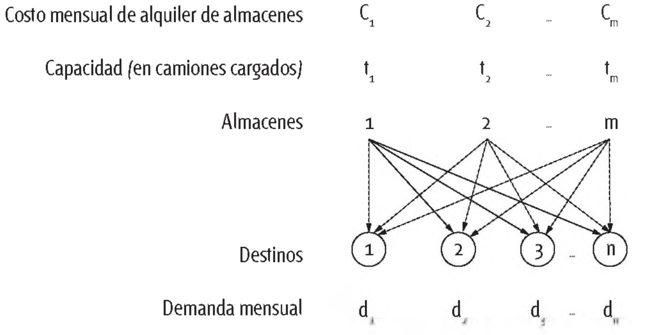


**Figura 1.** Esquema del problema a resolver.
**Fuente:** Elaboración propia.

## Algunos elementos teóricos importantes

En primer lugar, se necesita incluir $m$ variables binarias o dicotómicas ($Y_i$) que indiquen si un almacén $i$ se alquila o no, para poder cargar el costo de alquiler mensual de los almacenes ($C_i$) que resulten alquilados en la función que se quiere optimizar (función-objetivo que representa los costos generados por unidad de actividad), que es el costo total mensual de alquiler, al multiplicar cada una de dichas variables binarias por el costo de alquiler mensual de cada almacén.

La función-objetivo incluye, además, la suma de los productos de los costos de alquiler mensual de cada camión ($c_{ij}$) que se alquile desde cada almacén $i$ hasta cada destino $j$ por la cantidad de camiones alquilados. Para esto se utilizan variables con doble subíndice ($X_{ij}$) que indican el número de camiones que se requiere alquilar desde cada almacén $i$ alquilado hasta cada destino $j$ al que se envíen las cargas.

De lo anterior se concluye que la función a optimizar es lineal. Por otro lado, las restricciones que se deben realizar se refieren a la satisfacción obligatoria de las demandas de los $n$ destinos y no sobrepasar la cantidad de camiones disponibles ($t_k$) en cada almacén para el transporte de cargas.

La satisfacción obligatoria de las demandas de los $n$ destinos se expresa como $n$ ecuaciones lineales, formadas en el miembro izquierdo por la suma de

las cantidades de camiones que se alquilen desde cada almacén hacia cada destino ($X_{ij}$), igualada a la demanda mensual de cada destino $d_l$.

No sobrepasar la cantidad de camiones disponibles $t_k$ en cada almacén para el transporte de cargas se expresa como un conjunto de $m$ inecuaciones lineales, formadas cada una, en el miembro izquierdo, por la suma de las variables $X_{ij}$ para cada almacén $i$, y en el miembro derecho por el producto del número de camiones $t_k$ de cada almacén por la variable binaria $Y_i$, indicadora de si el almacén $i$ se alquila o no. Por lo tanto, la función objetivo, así como las restricciones resultan ser lineales, por lo que se trata de un modelo PL y, más específicamente, de un modelo PLEM, a causa de la presencia de variables binarias.

## Aplicaciones de las variables binarias (dicotómicas o 0-1)

Las variables binarias desempeñan un importante papel en la aplicación de la PLEP y de la PLEM. Estas hacen posible incorporar «decisiones de sí o no», llamadas a veces «decisiones dicotómicas», en el marco de la programación matemática. Dos ejemplos de ello son los problemas de ubicación de una planta en una localidad y los problemas de asignación de rutas, donde se decide si un camión va de una ciudad a otra. También proporcionan el recurso para imponer restricciones en las denominadas condiciones lógicas (Nocedal, 1999).

Sean las variables binarias $X_1, X_2, ..., X_n$ que toman valor 0 o 1, en dependencia de condiciones específicas:

- Si se exige no más de $k$ de entre $n$ alternativas es necesario imponer la restricción $X_1 + X_2 + ... + X_n \leq K$.
- No se desea elegir la opción $k$ a menos que se elija primero la opción $m$, por lo que se logra al imponer la restricción $X_k \leq X_n$ o $X_k - X_n \leq 0$.
- Si se elige una actividad se elige la otra, por lo que se logra imponer la restricción $X_k + X_n = 2$ $(X_k + X_n \leq 1)$.
- Si se realiza la actividad $j$, debe ser entre dos valores, ($A$ y $B$), lo que se logra al introducir una variable auxiliar entera $Y_j$, asociada a la variable no negativa $X_j$, que representa el nivel de la actividad $j$, lo que impone las restricciones siguientes:
  - $Y_j = 1$ si se realiza la actividad $j$ y $Y_j = 0$ si no se realiza la actividad $j$;
  - $X_j \geq AY_j$ y $X_j \leq BY_j$.

## Supuestos del modelo

- El costo de alquilar un almacén no depende del nivel de la actividad (con el número de camiones enviados desde él hacia un destino).
- Se considera el modelo como de planeación y no como un sistema detallado de operación, por lo que se puede considerar el número de camiones como una variable continua, pues si se asume como variable entera puede ser más difícil encontrar una solución al problema.
- Cuesta mucho más el alquiler de un almacén que el envío de un camión desde el almacén al destino. La magnitud de estos costos implica que sea relativamente más importante la decisión de «alquilar o no

alquilar» un almacén, considerada como variable entera, en oposición al envío de los camiones.

- Se cumple el supuesto de proporcionalidad, pues el uso de recursos (camiones alquilados en un almacén) es proporcional al nivel de la actividad (transporte de cargas desde un almacén hasta los destinos).
- Se cumple el supuesto de actividad, puesto que el uso total de recursos es la suma de los recursos empleados por las actividades y el valor de la función objetivo es la suma de las contribuciones de las actividades individuales y la contribución de las variables de decisión a la función objetivo.
- El uso de recursos es independiente de los valores que se asignen a otras variables de decisión.
- Se cumple el supuesto de divisibilidad, pues es posible que algunas variables tomen valores no enteros.
- Se cumple el supuesto de determinismo, pues no hay aleatoriedad en los coeficientes que definen las variables de decisión del problema (costos de alquiler de los camiones). En particular, los coeficientes económicos de la función objetivo, los coeficientes tecnológicos o de insumo/producto y las cotas de recursos o de carácter empresarial son constantes conocidas.

## Desarrollo de las expresiones matemáticas para el modelo propuesto

Para la formulación matemática del modelo se consideran $m$ almacenes y $n$ destinos para la carga.

Sean:

$Y_i = 1$ si se alquila el almacén $i$, donde $1 \leq i \leq m$;
$Y_i = 0$ si no se alquila el almacén $i$;
$X_{ij}$ es el número de camiones alquilados desde el almacén $i$ hasta el destino $j$ donde $1 \leq j \leq n$;
$C_i$ es el costo mensual de alquiler del almacén $i$;
$C_{ij}$ es el costo de alquiler mensual del camión que se alquile desde el almacén $i$ hasta el destino $j$;
$T_i$ es la capacidad de los camiones cargados desde el almacén $i$;
$d_j$ es la demanda del destino $j$.

El modelo económico matemático queda como se muestra a continuación:

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^{m} C_i Y_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} X_{ij};$$

sujeto a:

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = d_j \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq T_i Y_i \text{ para } 1 \leq i \leq m,$$

$$Y_i = 0 \text{ o } 1 \text{ para } 1 \leq i \leq m,$$

$$X_{ij} \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq m \text{ y } 1 \leq j \leq n.$$

El modelo tiene $n$ ($m$ + 1) variables y $2m$ (1 + $n$) restricciones, que incluye la condición de no negatividad de las variables esenciales $X_{ij}$ y las restricciones de las variables binarias $Y_i$.

Al ser este un modelo PLEM, puede resolverse mediante el algoritmo del Método Simplex combinado con el método *branch and bound* (ramificar y podar), que utiliza el paquete informático WinQSB.

El Método Simplex fue desarrollado en 1947 por el científico norteamericano George Bernard Dantzig. Es un método iterativo que resuelve un problema de PL en un número finito de pasos, al partir de una solución básica inicial que mejora hasta llegar a la solución óptima del problema, si existe o encuentra uno de los denominados casos especiales que se pueden presentar.

El método *branch and bound* se utiliza en combinación con el Método Simplex en los problemas en enteros o enteros mixtos, para restringir la región de soluciones factibles y aproximarse a la solución entera. Ambos son utilizados por el paquete informático WinQSB.

## Un caso particular: empresa STECO[1]

A continuación se utilizan los datos obtenidos de una empresa norteamericana denominada STECO, que se dedica a la comercialización al por mayor de acero. Con el fin de ahorrar capitales, dicha empresa alquila almacenes regionales. Tiene cuatro distritos de venta (destinos) y le ofrecen el alquiler de tres almacenes con una flota de camiones que deben ser alquilados, por lo que la empresa quiere saber cuáles almacenes y cuántos camiones debe alquilar desde cada almacén hasta cada destino. Los datos son los que se presentan en la tabla 1.

**Tabla 1. Datos de entrada en el modelo.**

| ALMACÉN | COSTA POR CAMIÓN ($C_{ij}$) DESTINO | | | | CAPACIDAD MENSUAL (NÚMERO DE CAMIONES) | COSTO MENSUAL DEL ALQUILER |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| A | 170 | 40 | 70 | 160 | 200 | 7 750 USD |
| B | 150 | 195 | 100 | 10 | 250 | 4 000 USD |
| ALMACÉN | COSTA POR CAMIÓN ($C_{ij}$) DESTINO | | | | CAPACIDAD MENSUAL (NÚMERO DE CAMIONES) | COSTO MENSUAL DEL ALQUILER |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| C | 100 | 240 | 140 | 60 | 300 | 5 500 USD |
| Demanda mensual (camiones cargados) | 100 dólares (USD) | 90 USD | 110 USD | 60 USD | | |

**Fuente:** Castillo (2002).

[1] Siglas en inglés de compañía de acero. [N. de la E.]

## Construcción del modelo para el caso de la empresa STECO

### Variables esenciales o de decisión

$X_{ij}$ es el número de camiones enviados desde el almacén $i$ hasta el destino $j$, donde $i = A, B, C$ y $1 \leq j \leq 4$.

### Variables binarias

$Y_i$ = 1 si se alquila el almacén $i$, donde $i = A, B, C$.
$Y_i$ = 0 si no se alquila el almacén $i$.

### Sistema de restricciones lineales

$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} = 100$ que satisface la demanda del destino 1.
$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} = 90$ que satisface la demanda del destino 2.
$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} = 110$ que satisface la demanda del destino 3.
$X_{A4} + X_{B4} + X_{C4} = 60$ que satisface la demanda del destino 4.
$X_{A1} + X_{A2} + X_{A3} + X_{A4} - 200Y_A \leq 0.$ La capacidad del almacén A no será excedida.
$X_{B1} + X_{B2} + X_{B3} + X_{B4} - 250Y_B \leq 0.$ La capacidad del almacén B no será excedida.
$X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + X_{C4} - 300Y_C \leq 0.$ La capacidad del almacén C no será excedida.

### Función objetivo (minimizar el costo total de almacenes y camiones que se alquilen)

Para minimizar:

$$7\,750Y_A + 4\,000Y_B + 5\,500Y_C + 170X_{A1} + 40X_{A2} + 70X_{A3} +$$
$$160X_{A4} + 150X_{B1} + 195X_{B2} + 100X_{B3} + 10X_{B4} + 100X_{C1} +$$
$$240X_{C2} + 140X_{C3} + 60X_{C4}$$

### Condición de no negatividad de las variables

$X_{ij} \geq 0$ para $i = A, B, C$ y $1 \leq j \leq 4$.
$Y_i$ = 1 o 0 para $i = A, B, C$.

## Análisis de la salida obtenida como solución del modelo

- Se deben alquilar los almacenes A y C.
- Se deben alquilar 90 camiones del almacén A para el destino 2, 110 camiones del almacén A para el destino 3, 100 camiones del almacén C para el destino 1 y 60 camiones del almacén C para el destino 4.
- El costo total mínimo de alquiler de almacenes y camiones es de 38 150 USD.
- Se utiliza la capacidad máxima de camiones (200) del almacén A.
- Se utilizan solo 160 camiones del almacén C de un total de 300, por lo que quedan disponibles 140 para otras tareas.
- Quedan satisfechas, exactamente, todas las demandas de los cuatro destinos.

- Cada unidad de demanda adicional, desde cada destino, cuesta 100 USD para el destino uno; 78,75 USD para el destino dos; 108,75 USD para el destino tres y 60 USD para el destino cuatro.

## Conclusiones

El presente artículo puede servir de base para elaborar procedimientos eficientes para la planeación de la transportación de cargas en el país con un costo mínimo. En el caso concreto de la empresa STECO se obtuvo la solución del problema al utilizar el paquete informático WinQSB. La solución resultó ser entera aunque fue modelada sin restringir las variables de decisión a la condición de enteros.

La utilización de la técnica de optimización conocida como «problema de transporte», en combinación con otros modelos, reporta notables ahorros en la transportación de mercancías.

## Recomendaciones

Se sugiere utilizar la potencia del uso de variables binarias en problemas de optimización lineal discreta de forma combinada con el paquete informático WinQSB, para minimizar el costo mensual de alquiler de almacenes y camiones dedicados a la distribución de cargas desde los almacenes hacia varios destinos.

### BIBLIOGRAFÍA

CASTILLO, E. (2002): *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia*, Academic Press, New York.

HIRIART-URRUTY, J.B. (1996): *Convex analysis and minimization*, Springer-Verlag, Berlin.

NOCEDAL, A.J. (1999): *Numerical optimization*, Springer, New York.

PARTIDO COMUNISTA DE CUBA (2011): *Lineamientos de la Política Económica y Social del Partido y la Revolución*, La Habana.

RAO, S.S. (1996): *Engineering optimization. Theory and practice*, Wiley, New York.

WRIGHT, S.J. (1997): *Primal-dual interior-point methods*, SIAM, Philadelphia.

•••